1

TEOREMAS FUNDAMENTALES

1.1 CONSIDERACIONES GENERALES.

El diseño de Estructuras implica un profundo conocimiento del comportamiento de las mismas, lo cual hace imprescindible el estudio de las cargas permanentes y accidentales, los materiales a utilizar ya que sus propiedades hacen a las condiciones de diseño, las necesidades para el funcionamiento que se le ponen al proyectista y, entre otras cosas el Análisis de la Estructura, entendiéndose por Análisis el cálculo de solicitaciones (Reacciones, Momentos flectores y torsores, Esfuerzos normales y de corte) y de deformaciones.

El Análisis de Estructuras es el principal objetivo de la Asignatura, con la salvedad de que si sólo fuera hallar los valores numéricos de solicitaciones y deformaciones, no tendríamos mas que explicar el uso de alguno de los Programas para el Cálculo de Estructuras que se venden en el mercado y que cada día son más potentes.

El objetivo de la Asignatura es la formación más amplia del estudiante en el conocimiento de las Estructuras que le permitan poder analizar en la práctica futura los datos obtenidos con el objetivo de optimizar el diseño y/o salvar los posibles errores que se pudieran cometer en el proceso de Análisis y Diseño.

Nos será necesario en el curso un buen conocimiento de la Estática y Resistencia de Materiales, ya vistos en asignaturas anteriores, y la utilización de los estados de deformación del sistema para lo cual estudiaremos en el presente Capítulo algunos Teoremas y Principios Generales con una presentación orientada a su aplicación a Sistemas Estructurales de la Ingeniería.

1.2-PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE EFECTOS

Si tenemos un sólido elástico lineal al cual aplicamos un sistema de fuerzas (causa) se producirán distintos efectos, como por ejemplo: reacciones de apoyo, tensiones, deformaciones, solicitaciones, etc.(efectos).

Si pensamos en una estructura podemos decir: "El efecto que produce un conjunto de fuerzas que actúan en forma simultánea es igual a la suma de los efectos que produce cada una de las fuerzas por separado".

En su expresión más general dice: "La relación entre causa y efecto es lineal."

Como consecuencia de ello:

A una causa C1 le corresponde un efecto E1 y a una causa C2 le corresponde un efecto E2 a una causa $C = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2$, con α y β constantes, le corresponderá un efecto $E = \alpha \cdot E_1 + \beta \cdot E_2$.

El principio implica una absoluta linealidad, para el caso de estructuras, entre las cargas y las deformaciones, esfuerzos o solicitaciones.

Esta linealidad no se da principalmente en los siguientes casos:

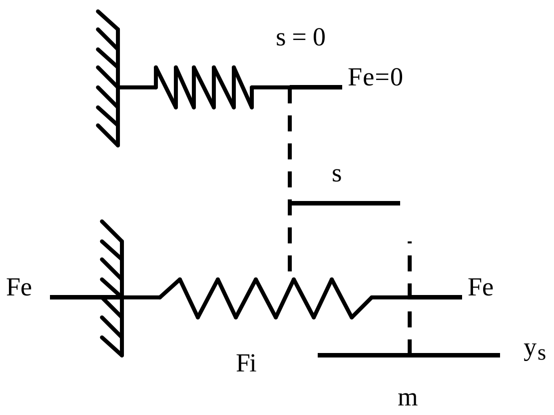
a) Cuando no se cumple la ley de Hooke, o sea, no existe linealidad entre tensiones y deformaciones.
b) Cuando la geometría de la estructura cambia en forma apreciable, y para el equilibrio es necesario tomar en cuenta la modificación sufrida por el sistema.

En la mayor parte del curso utilizaremos el principio de Superposición de efectos para la resolución de estructuras (análisis elástico y campo de las pequeñas deformaciones).

Como en el curso se verán problemas de Trabajo de Deformación y Energía es importante tener en cuenta que no es aplicable este principio al no existir una relación lineal entre las fuerzas y el Trabajo que estas producen al deformar la Estructura.

1.3– TRABAJO Y ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN

Para introducirnos en el tema de las deformaciones y de Trabajo y Energía que se producen, veamos un simple ejemplo unidireccional como el de la figura donde la fuerza Fe es colineal con el eje coordenado s



En la primer figura se tiene un sistema indeformado antes de la aplicación de la fuerza Fe y por lo tanto la partícula de masa m se encuentra en s = o origen de coordenadas.

En la segunda figura está aplicada la fuerza Fe, con la salvedad de haber sido aplicada lentamente en forma creciente de manera tal que no se produzcan aceleraciones y velocidades apreciables y por lo tanto no se genere Energía Cinética, estando en cada instante en equilibrio la fuerza exterior Fe con la Fuerza interior Fi equilibrante producida por la resistencia al alargamiento del resorte que tiene un coeficiente constante de resorte k mayor que cero.

$Fi = -k \cdot s$ negativa pues tiene sentido contrario a ***s***.

Si evaluamos el trabajo que efectúa la fuerza Fi durante su desplazamiento ds

$$dTi = Fi \cdot ds = -k \cdot s \cdot ds$$

y si queremos el trabajo total de Fi:

$$\int_0^s dTi = Ti = -\int_0^s k \cdot s \cdot ds = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2$$

Este trabajo es negativo pues se realiza en contra de la fuerza Fi del resorte, que equilibra a la Fe. Si hacemos el mismo análisis del trabajo Te que efectúa la carga Fe, por ser esta igual y contraria a Fi, el mismo valdrá:

$$Fe = -Fi = k \cdot s \qquad\qquad Te = -Ti = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2$$

En este análisis hemos considerado un sistema formado por la partícula m en equilibrio.

Tomemos ahora en el sistema formado por el resorte y la partícula m y tratemos de dar una interpretación a Te y Ti.

Al trabajo Te de la fuerza externa lo denominamos *Trabajo Externo* y se produce a lo largo del desplazamiento externo s: $\left(Te = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2 \right)$

Ahora bien, el resorte es una parte (interna) del sistema resorte - partícula que produce el *Trabajo Interno* Ti al deformarse de manera tal que:

$$Te = -Ti = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2$$

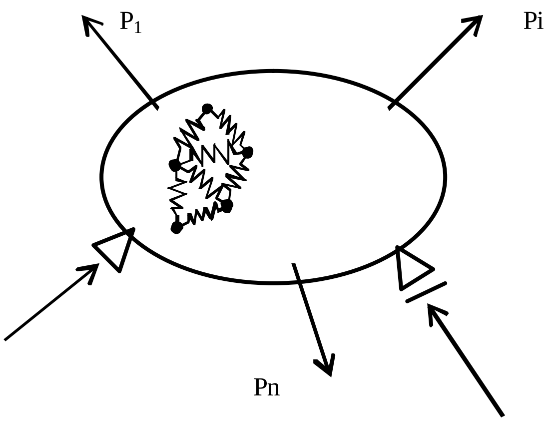
Podemos decir que el trabajo de la fuerza externa (Te) se gasta en deformar el resorte (elemento interno) que acumula el trabajo en forma de una Energía Elástica Potencial de Deformación (U). Si retiramos la fuerza Fe la partícula regresara a su posición original s = 0 y la Fi producirá un Trabajo positivo producto de la Energía acumulada.

En el análisis producido se cumple:

$$Te + Ti = 0$$
$$Te = -Ti = U$$

Nótese que en todo el proceso no se producen pérdidas de trabajo por rozamiento, calor, etc., y es posible aplicar los Principios Generales del Trabajo y Energía y principalmente el de Conservación de la Energía para sistemas conservativos.

Supongamos ahora un Sólido Elástico y tratémoslo de visualizar como si estuviera formado por un conjunto de partículas unidas por elementos o vínculos elásticos (resortes) internos y tratemos de extrapolar para este caso el ejemplo visto hasta aquí.



Al aplicar fuerzas sobre un sólido elástico se producen tensiones internas (σ, τ), deformaciones específicas (ε, γ) y desplazamientos externos de los puntos de aplicación de las fuerzas.

Las fuerzas externas efectuarán un Trabajo Externo Te a lo largo de los desplazamientos externos, este trabajo externo se emplea en deformar el sólido, vencer los rozamientos de los vínculos externos e internos, producir energía cinética (debido a los movimientos), y acumular Energía Potencial de Deformación debida a las tensiones y deformaciones internas.

En general en las Estructuras y para cargas de servicio se pueden hacer las siguientes consideraciones:

a) Las fuerzas se aplican en forma paulatina de manera que los desplazamientos son muy lentos y no se produce Energía Cinética al no existir aceleraciones y velocidades sensibles.
b) No existen rozamientos en los vínculos externos, y por lo tanto no se gasta ningún trabajo que en caso contrario se disiparía como Calor o Energía Térmica.
c) El cuerpo es perfectamente elástico y al no haber deformaciones plásticas las deformaciones son reversibles, no existiendo pérdidas de Energía por rozamiento de vínculos internos.

Bajo estas premisas podemos decir que nuestro sistema es conservativo, de manera tal que: El Trabajo Externo se utiliza para vencer la resistencia de los vínculos internos representados por las tensiones internas de manera que al no existir un intercambio de Trabajo y Energía con el exterior se cumple:

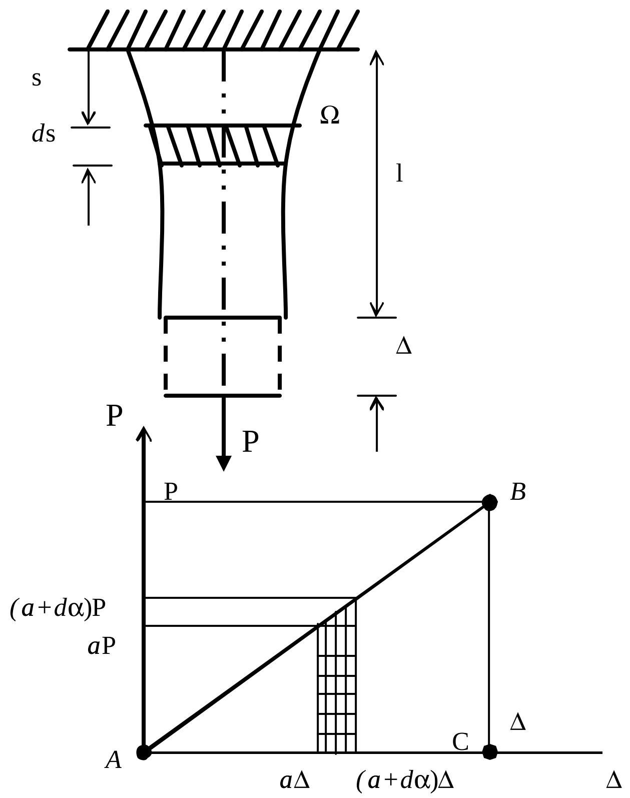
$$Te + Ti = 0$$
$$Te = - Ti = U$$

donde U es la Energía Potencial de Deformación.

De la última expresión surge que en valor absoluto se cumple que $|Te| = |Ti|$ y en la bibliografía distintos autores realizan estas igualdades cambiando el signo de Ti.

El criterio docente que adoptaremos es que el Trabajo Externo, que realizan las fuerzas exteriores a lo largo de las deformaciones que ellas mismas producen, es positivo y se gasta en vencer la resistencia de las tensiones internas que produce un Ti negativo, trabajo que se acumula como Energía Potencial de Deformación U que puede ser recuperada al eliminar las cargas externas y volver el sólido a su posición original sin deformación. Veamos para distintos casos de solicitaciones las expresiones que nos dan el cálculo de los Trabajos y Energía producidos.

1.3.1-ESFUERZOS NORMALES



Sea una barra simple traccionada con una fuerza extrema $(\alpha \cdot P)$ que va creciendo en forma paulatina desde un valor 0 hasta un valor final P.

En un instante la carga tendrá un valor $(\alpha \cdot P)$ donde $0 \leq \alpha \leq 1$ Siendo $\alpha = 0$ para el inicio de la carga y $\alpha = 1$ para la carga final.

El desplazamiento final que produce la carga final P será Δ y dado que estamos en un material que cumple la Ley de Hooke es válido el Principio de Superposición y a una carga $(\alpha \cdot P)$ corresponderá un corrimiento $(\alpha \cdot \Delta)$ por su dependencia lineal.

Asimismo en una sección dada tendremos tensiones internas normales s, cuya resultante conocemos como esfuerzo normal $N = \int \sigma \cdot d\Omega$ siendo Ω el área para coordenada s.

Valuemos el Trabajo Externo en el instante en que con la carga aplicada $(\alpha \cdot P)$ se produce un incremento $(d\alpha \cdot P)$ para pasar a la carga $(\alpha + d\alpha)P$ con un incremento $(d\alpha \cdot \Delta)$.

$$dTe = (\alpha \cdot P) \cdot (d\alpha \cdot \Delta) + (d\alpha \cdot P) \cdot (d\alpha \cdot \Delta)$$

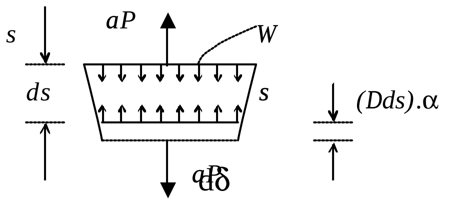
Dónde el segundo término se desprecia por ser un infinitésimo de 2º orden:

$$dTe = (\alpha \cdot P) \cdot (d\alpha \cdot \Delta) = P \cdot \Delta \cdot \alpha \cdot d\alpha \qquad \text{(área sombreada)}$$

Integrando entre α = 0 y α = 1 tendremos el Te total

$$Te = \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} P \cdot \Delta \cdot \alpha \cdot d\alpha = P \cdot \Delta \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2} P \cdot \Delta \qquad \text{(área ABC)}$$

Analicemos ahora el trabajo interno Ti en el volumen $\Omega \cdot ds$ en el cual, para la fuerza αP corresponderá un esfuerzo normal αN que es la resultante de las tensiones normales σ en la sección Ω, produciéndose para el elemento ds un alargamiento (Δ.ds) cuando la carga sea P y el esfuerzo normal N. Se cumplirá



$$(\Delta ds) = \frac{N}{\Omega E} ds$$

Cuando la carga sea αP:

$$\sigma = \frac{\alpha \cdot N}{\Omega} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\alpha \cdot (\Delta ds)}{ds} = \frac{\alpha \cdot N}{\Omega \cdot E} \;;$$

Al incrementar la fuerza un $d\alpha \cdot P$ se producirá un $d\alpha .N$ y un incremento de deformación.

$$d\varepsilon = d\alpha \left(\frac{\Delta ds}{ds} \right)$$

lo cual implica un incremento de trabajo efectuado en contra de las tensiones actuantes:

$$dTi = -(\sigma \cdot \Omega)(d\varepsilon \cdot ds) = -(\sigma \cdot \Omega)(d\alpha \cdot \Delta s)$$

$$dTi = -N.\alpha.\frac{N.d\alpha}{E\Omega} ds \cdot = -\frac{N^2}{E\Omega} ds \cdot \alpha \cdot d\alpha$$

Integrando entre α = 0 y α = 1 para el volumen $\Omega \cdot ds$

$$dTi = -\int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \frac{N^2}{E\Omega} ds \cdot \alpha \cdot d\alpha = -\frac{N^2}{E\Omega} ds \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha \cdot d\alpha = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{E\Omega} ds$$

y el Ti en toda la barra:

$$Ti = -\frac{1}{2} \int_{s=0}^{l} \frac{N^2}{E\Omega} ds$$

$$-Ti = U = \frac{1}{2} \int_{s=0}^{l} \frac{N^2}{E\Omega} ds$$

La bibliografía que toma un cambio de signo en el Ti lo hace considerando un cambio entre las solicitaciones equilibrantes y las equivalentes que son iguales y de sentido contrario.

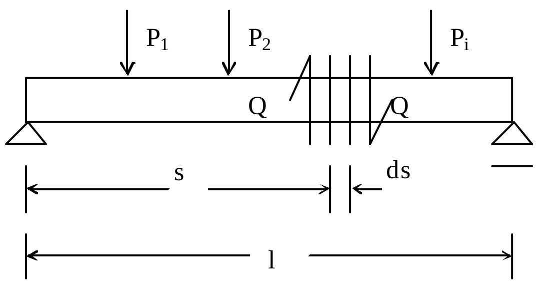
A la energía por unidad de volumen se la denomina Energía específica de deformación u y vale:

$$u=\frac{dU}{\Omega\cdot ds}=-\frac{dTi}{\Omega\cdot ds}=+\frac{1}{2}\frac{N^2}{E\Omega^2}=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$$

y teniendo en cuenta $\sigma = E\cdot\varepsilon$

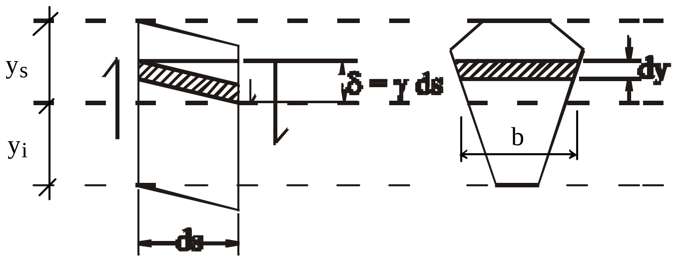
$$u=\frac{1}{2}E\cdot\varepsilon^2\text{, o bien }\; u=\frac{1}{2}\sigma\cdot\varepsilon$$

1.3.2-ESFUERZOS DE CORTE



Supongamos una viga sometida a esfuerzo de corte Q resultante de las tensiones tangenciales internas *t* a la cual corresponden distorsiones γ según:

$$\tau=\frac{Q\cdot Se}{I\cdot b}$$



Con Se = Momento estático de la sección superior respecto al eje neutro baricéntrico.

I = Momento de inercia respecto al mismo eje.

$$\gamma=\frac{\tau}{G}$$

El trabajo interno en el diferencial de volumen si las cargas se aplican lentamente será:

$$-dTi=dU=\frac{1}{2}(\tau\cdot b\cdot dy)(\gamma ds)=\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}(\cdot b\cdot dy)\cdot ds$$

$$-dTi=dU=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{G}\frac{Se^2}{I^2\cdot b}dy\cdot ds$$

Dónde llamando $\frac{\chi}{\Omega}=\int_{-yi}^{ys}\frac{Se^2}{I^2\cdot b}dy$

χ=coeficiente de forma que depende del tipo de sección.

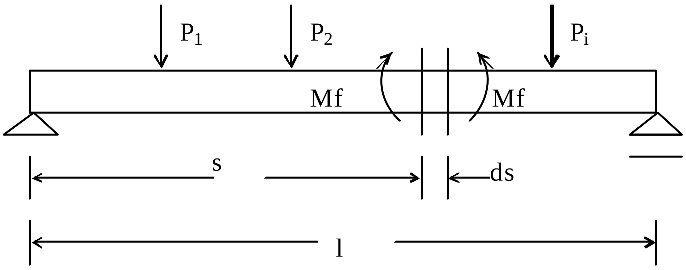
$$-dTi=dU=\frac{1}{2}\chi\frac{Q^2}{G\Omega}ds$$ para un volumen de longitud ds

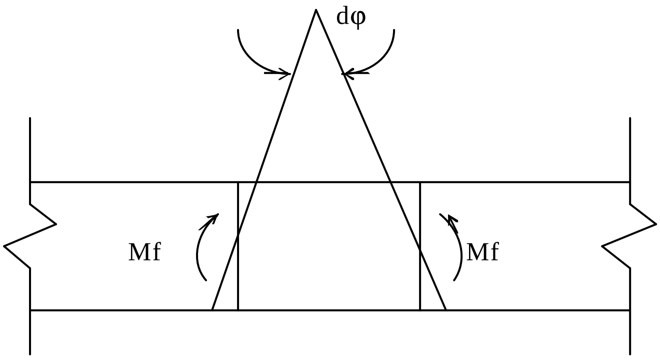
$$-Ti=U=\frac{1}{2}\int_0^l\chi\frac{Q^2}{G\Omega}ds$$ para la barra completa

1.3.3-MOMENTO FLECTOR

En este caso si queremos el trabajo interno en el elemento de longitud ds tendremos:

$$-\,dTi = dU = \frac{1}{2}(Mf)(d\varphi)$$





ya que en estos casos es el producto del momento por el giro producido, apareciendo siempre el ½ al aplicarse en forma paulatina los esfuerzos.

Remplazando:

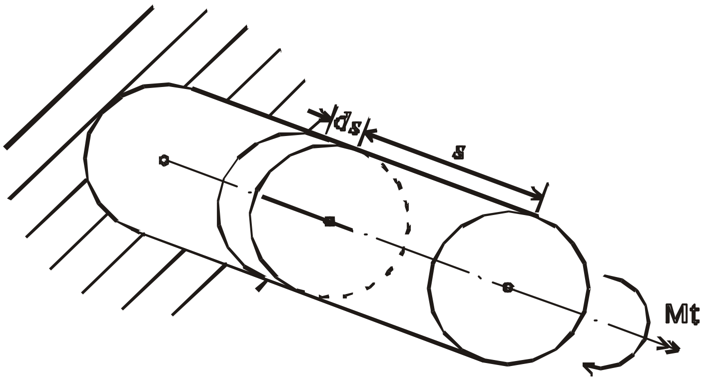
$$d\varphi = \frac{Mf}{EI}ds$$

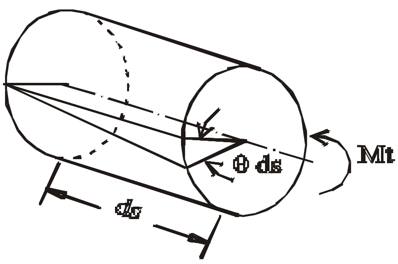
$$-\,dTi = dU = \frac{1}{2}\frac{Mf^2}{EI}ds$$

En la viga completa:

$$-\,Ti = U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mf^2}{EI}ds$$

1.3.4-MOMENTOS TORSORES





Con cargas paulatinas en el volumen de longitud ds se producirá un giro θ·ds con ángulo θ de distorsión unitaria:

$$\theta = \frac{Mt}{GIp}$$

$$-\,dTi = dU = \frac{1}{2}(Mt)(\theta \cdot ds) = \frac{1}{2}\frac{Mt^2}{GIp}ds$$

$$-\,Ti = U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mt^2}{GIp}ds$$

Para un elemento en que actúen en forma simultánea las 4 solicitaciones, el trabajo interno total cambiado de signo, igual a la energía de deformación será:

$$-\,Ti = U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mf^2}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_{s=0}^l \frac{N^2}{E\Omega}ds + \frac{1}{2}\int_0^l \chi\frac{Q^2}{G\Omega}ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mt^2}{GIp}ds$$

Expresión en la que se han sumado los trabajos de las distintas solicitaciones, a pesar de lo expresado en el último párrafo de 1-2.

Esto es así por que consideramos al Mf, N, Q y Mt solicitaciones de un mismo estado de cargas P1; P2; .....Pi y no estamos sumando trabajo debido a estados de carga que se van sumando. Los productos EI; EΩ; GΩ; GIp se denominan rigidez a la Flexión, Esfuerzo Normal, Corte y Torsión respectivamente y nos indican:

$\frac{1}{EI} =$ Rotación $d\varphi$ para Mf = 1 en una barra de longitud unitaria.

$\frac{1}{E\Omega} =$ Alargamiento Δ para N = 1 en una barra de longitud unitaria.

$\frac{c}{GW} =$ desplazamiento δ para Q = 1 en una barra de longitud unitaria.

$\frac{1}{GIp} =$ Rotación θ para Mt = 1 en una barra de longitud unitaria.

Cuando mayor sea la rigidez menor será la deformación para una misma solicitación.

1.4 - <u>PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES</u>

El principio tratado de diversas formas en la bibliografía es una herramienta poderosísima para la estática y los corrimientos de los cuerpos rígidos o deformables a tal punto que las condiciones de equilibrio de la estática pueden ser demostradas si se acepta este Principio, o por el contrario, a partir de las condiciones de equilibrio el Principio de los Trabajos Virtuales puede ser demostrado. Con otras palabras podemos decir que si un cuerpo está en equilibrio cumplirá con el P.T.V. o por el contrario si el cuerpo cumple con este Principio necesariamente está en equilibrio.

En la Mecánica Racional se enuncia como:

> *“En una partícula en equilibrio bajo un sistema de fuerzas, el trabajo de dichas fuerzas a lo largo de un desplazamiento virtual es nulo”*

Explicitemos que definimos como "*desplazamiento virtual a un desplazamiento ideal, arbitrario, pequeño y compatible con los vínculos*" donde es:

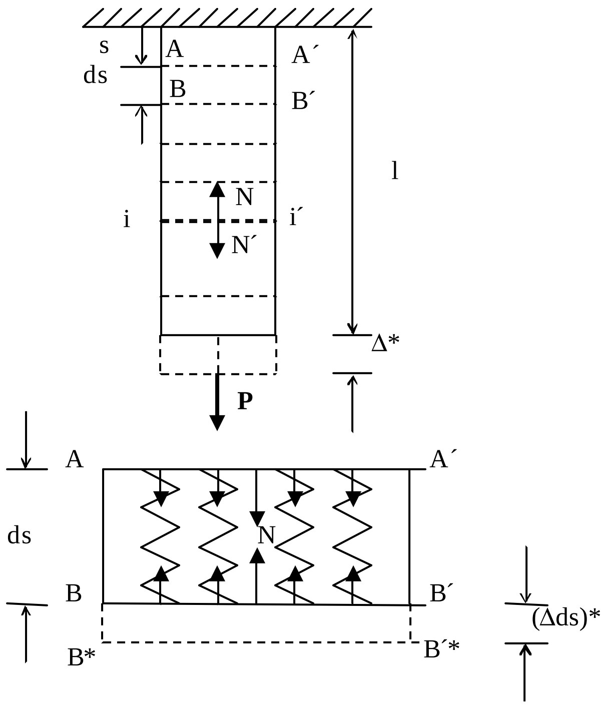
Ideal: real, arbitrario o debido a cualquier causa.

Pequeño: pequeño, pero no necesariamente infinitésimo, de manera tal que las ecuaciones no pierdan su linealidad por dicha causa.

Compatible con los vínculos. Los desplazamientos deben cumplir con las condiciones de vinculación interna o externa de las partículas o el cuerpo.

Es importante explicitar que el sistema de fuerzas en equilibrio que realiza los trabajos es independiente de los desplazamientos virtuales o de las causas que los producen.

Tratemos de pensar en un sólido elástico como si fuera una barra sometida a una fuerza externa de tracción de valor P que está formada por partículas elásticas de longitud ds como la AA´BB´.



En una sección genérica ii´ las tensiones que produce la carga P nos dará un esfuerzo normal $N = \sigma \cdot \Omega$ que equilibra a P o uno igual y contrario N´ que equivale a P.

Demos ahora a la barra un desplazamiento virtual (independiente de la carga P y de los desplazamientos que produce dicha carga) que designaremos como Δ^*.

El elemento AA´BB´, elástico, que imaginamos formado por resortes que están sufriendo las tensiones σ que nos dan N, sufrirá un alargamiento interno virtual

$$\varepsilon^* \, ds = (\Delta ds)^* = \Delta^* ds / l$$

En cuanto a los trabajos virtuales que se producen tendremos

Trabajo Virtual Externo:

$$Te^* = P \cdot \Delta^*$$

mientras que en cada partícula AA´BB´ de long. ds se producirá un Trabajo Virtual Interno:

$$dTi^* = -N \cdot (\Delta \cdot ds)^* = -N \cdot \varepsilon^* \cdot ds = -\sigma \cdot \varepsilon^* \cdot \Omega \cdot ds$$

y en toda la barra:

$$Ti^* = -\int_0^l N \cdot (\Delta \cdot ds)^* = -\int_0^l N \cdot \varepsilon^* \cdot ds = -\int_0^l \sigma \cdot \varepsilon^* \cdot \Omega \cdot ds$$

Estando el cuerpo formado por todas las partículas y siendo la suma de todos los trabajos nulos:

$$P \cdot \Delta^* - \int_0^l N \cdot \Delta \, ds^* = 0 \qquad\qquad P \cdot \Delta^* - \int_0^l \sigma \cdot \Omega \cdot \varepsilon^* \cdot ds = 0$$

$$Te^* + Ti^* = 0$$

Esta última expresión no dice que *“los Trabajos Virtuales Externos e Internos deben ser iguales y de signo contrario”* y su aplicación es válida aún en el campo plástico.

Aquí también algunos autores cambian el signo del Ti* al considerar las solicitaciones equivalentes N´ y expresan el principio como que el Trabajo Virtual externo es igual al Trabajo Virtual Interno.

1.4.1-CUERPOS RIGIDOS

En el caso presente al no existir deformaciones ε^* el Ti* es nulo y en consecuencia se cumplirá que:

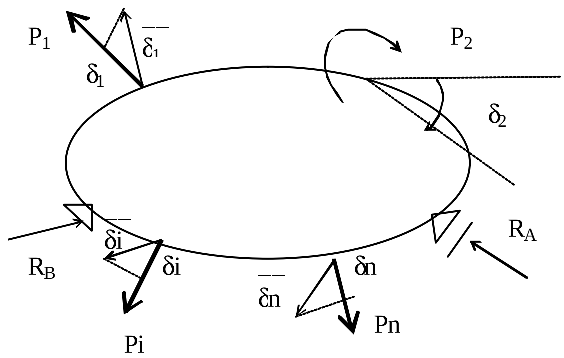
$$Te^* = 0$$

Expresándose el P.T.V. de la siguiente forma:

> *“Si damos una traslación virtual a un sólido rígido en equilibrio, la suma de los Trabajos del sistema de fuerzas externas en equilibrio a lo largo de los desplazamientos virtuales es cero”.*

En cursos anteriores lo hemos aplicando para distintos problemas, entre ellos el Cálculo de las Líneas de Influencia por el Método de la cadena Cinemática.

1.5-TEOREMA DE CLAPEYRON



Consideremos un Sólido elástico al cual se le puede aplicar el principio de superposición, existiendo una relación lineal entre cargas y desplazamientos. Aplicamos un sistema de cargas P_1, P_2, …,Pi, …Pn, y sean $\delta_1,\delta_2,\ldots\delta_i,\ldots\delta_n$, los corrimientos correspondientes con las cargas (aquellos a lo largo de los cuales se producen los trabajos) y $\overline{d_1},\overline{d_2},\ldots\overline{di},\ldots\overline{dn}$ los corrimientos reales

Si las cargas se aplican gradualmente, los valores absolutos de Te y Ti serán iguales y dependerán únicamente del estado final de cargas y desplazamientos, y no del orden en que se apliquen las cargas.

Asumamos que las cargas se aplican con un incremento porcentual similar en todas ellas mediante un parámetro α que crece variando desde 0 hasta 1. ($0\leq \alpha \leq 1$)

En un instante t estarán aplicadas las cargas:

$$\alpha P_1 \quad \alpha P_2 \ldots\ldots \alpha P_i \ldots \alpha P_n$$

a las que corresponderán desplazamientos:

$$\alpha\delta_1 \quad \alpha\delta_2 \ldots\ldots \alpha\delta_i \ldots \alpha\delta_n$$

Al crecer las cargas un:

$$d\alpha P_1 \quad d\alpha P_2 \ldots\ldots d\alpha P_i \ldots d\alpha P_n$$

se producirán incrementos de desplazamientos:

$$d\alpha\delta_1 \quad d\alpha\delta_2 \ldots\ldots d\alpha\delta_i \ldots d\alpha\delta_n$$

Con un incremento en el Trabajo externo igual al incremento de Energía Potencial de Deformación

$$dTe = dU = \sum_{i=1}^{n} (\alpha P_i)(d\alpha.\delta i) + \text{Diferencia l de 2º orden}$$

$$dTe = dU = \alpha \cdot d\alpha \sum_{i=1}^{n} Pi \cdot \delta i$$

El Trabajo o Energía total durante todo el proceso de carga será:

$$Te = U = \sum_{i=1}^{n} Pi \cdot \delta i \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Pi \cdot \delta i$$

$$Te = U = \frac{1}{2}\left[P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots + Pi \cdot \delta i + \ldots + Pn \cdot \delta n\right]$$

Dónde Pi es el vector fuerza o momento y δi el vector desplazamiento o rotación.
La última expresión es el Teorema de CLAPEYRON y nos dice:

"El trabajo desarrollado durante la carga de un sólido elástico, por un sistema de cargas en equilibrio, es independiente del orden de aplicación de las cargas, y su valor es igual a la mitad de la suma del producto del valor final de las fuerzas por el valor final de los desplazamientos correspondientes de su punto de aplicación"

Reiteramos que desplazamiento correspondiente o generalizado es aquel en el cual la fuerza desarrolla su trabajo, o sea colineal con la fuerza.
Otras formas de expresar este trabajo son las siguientes:
Denomino como coeficiente de influencia (o flexibilidad) δij al desplazamiento correspondiente con Pi del punto i para una carga unitaria en j de Pj=1.
El corrimiento del punto i valdrá:

$$\delta i = P_1 \cdot \delta i_1 + P_2 \cdot \delta i_2 + \ldots + Pi \cdot \delta ii + \ldots + Pn \cdot \delta in = \sum_{j=1}^{n} Pj\delta ij$$

y

$$Te = U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Pi \sum_{j=1}^{n} Pj \cdot \delta ij$$

$$Te = U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Pi \cdot Pj \cdot \delta ij$$

Función cuadrática de las cargas Pi

Análogamente se pueden definir coeficientes kij que nos den una expresión cuadrática de los δi de la forma:

$$Te = U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} kij \cdot \delta i \cdot \delta j$$

1.6-TEOREMA DE BETTI (Ley de reciprocidad)

De la relación del Trabajo con funciones cuadráticas de las fuerzas y deformaciones, ratificamos lo ya señalado en el tema (1-2) de que no es aplicable el Principio de Superposición y por lo tanto el trabajo de deformación de varias fuerzas no es igual a la suma de los trabajos de cada una de ellas por separado.

Supongamos que sobre un cuerpo actúa un sistema de fuerzas P que produce deformaciones δ y una energía de deformación U igual a un trabajo Te, y dicho sistema de cargas P esta formado por la suma de dos estados de carga que llamaremos P_I y $P_{II.}$

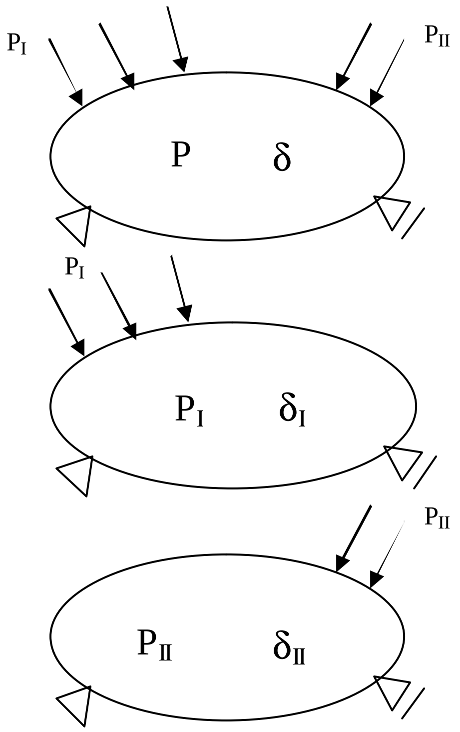
Supongamos que sobre un cuerpo actúa un sistema de fuerzas P que produce deformaciones δ y una energía de deformación U igual a un trabajo Te, y dicho sistema de cargas P esta formado por la suma de dos estados de carga que llamaremos P_I y P_{II}

$$P = P_I + P_{II}$$

Si δI es el conjunto de desplazamientos correspondientes a la carga PI y δII es el correspondiente a las cargas PII se cumplirá:

$$\delta = \delta_I + \delta_{II}$$

Cualquiera sea el orden en que se aplican las fuerzas.



P; δ producen Te = U y veamos de aplicar las cargas P de dos formas distintas:

a) Primero P_I y luego P_{II}

$$U = U_{I,I} + U_{II,II} + U_{I,II} \qquad \text{(a)}$$

Donde Ui,j representa el valor de la energía o trabajo externo de las cargas Pi a lo largo de los desplazamientos debido a las cargas Pj (i y j con valores I y II)

b) Primero P_{II} y luego P_I

$$U = U_{II,II} + U_{I,I} + U_{II,I} \qquad \text{(b)}$$

Como los dos estados finales son iguales, también lo serán los Trabajos finales y de igualar las expresiones de a) y b) obtendremos:

$$U_{I,II} = U_{II,I}$$

O sus iguales:

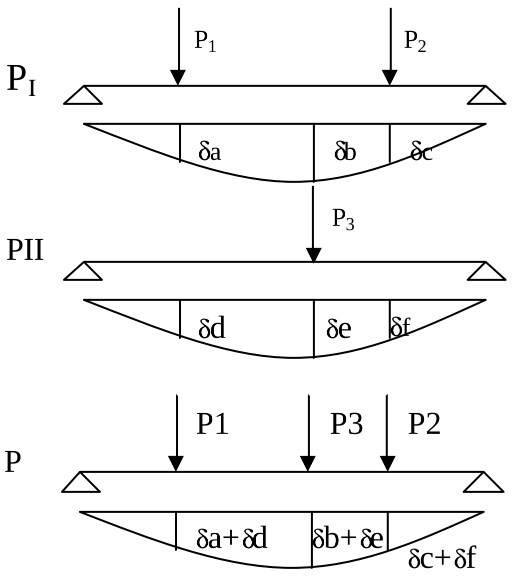
$$Te_{I,II} = Te_{II,I}$$

Expresión del Teorema de BETTI:

"El trabajo de un estado de cargas en equilibrio P_I a lo largo de los desplazamientos producidos por otro estado de cargas en equilibrio P_{II} es igual al trabajo de las cargas P_{II} a lo largo de los desplazamientos producidos por P_I."

A estos trabajos se los denomina recíprocos o indirectos.

Una aplicación teórica a una viga permite explicitar el significado de las expresiones:



$$U_{I-I} = \frac{1}{2}\left[P_1\delta_a + P_2\delta_c\right]$$

$$U_{II-II} = \frac{1}{2}\left[P_3\delta_e\right]$$

$$U_{I-II} = P_1\delta_d + P_2\delta_f$$

$$U_{II-I} = P_3\delta_b$$

Caso a)

$$U = \left(\frac{P_1 \cdot \delta_a}{2} + \frac{P_2 \cdot \delta_c}{2}\right) + \left(\frac{P_3 \cdot \delta_e}{2}\right) + \left(P_1 \cdot \delta_d + P_2 \cdot \delta_f\right)$$

Caso b)

$$U = +\left(\frac{P_3 \cdot \delta_e}{2}\right) + \left(\frac{P_1 \cdot \delta_a}{2} + \frac{P_2 \cdot \delta_c}{2}\right) + P_3 \cdot \delta_b$$

De la igualdad en los dos casos:

$$U_{I-II} = P_1\delta_d + P_2\delta_f = P_3 \cdot \delta_b = U_{II-I}$$

Tomando estados finales P y δ, por teorema de CLAPEYRON:

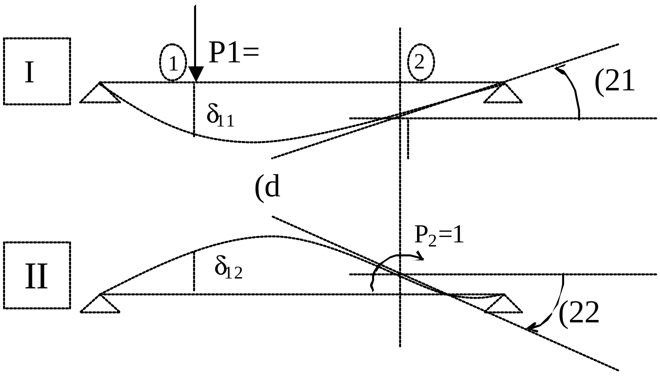
$$U = \frac{1}{2}\left[P_1(\delta_a + \delta_d) + P_3(\delta_b + \delta_e) + P_2(\delta_c + \delta_f)\right]$$

1.7-<u>TEOREMA DE MAXWELL</u>

Este Teorema tratado aquí como un caso particular del Teorema de Betti fue enunciado con anterioridad a este último. Betti solo generalizó las conclusiones a que había llegado Maxwell.

En la figura siguiente de una viga tenemos dos estados de carga y deformaciones, con la salvedad que ambos estados de cargas son unitarios.

I	P_1=1	δ_{11}	δ_{21}
II	P_2=1	δ_{12}	δ_{22}



Aplicando el Teorema de Betti:

$$P_1 \cdot \delta_{12} = P_2 \cdot \delta_{21}$$

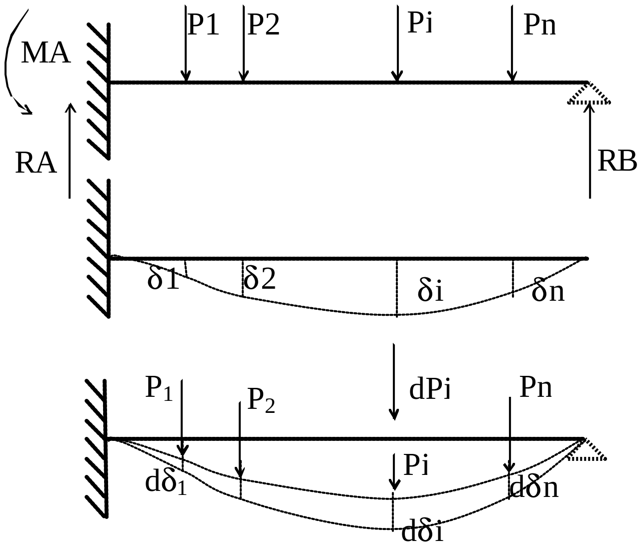
y siendo ambas cargas unitarias

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

“El valor del corrimiento de un punto 1 según una cierta dirección P_1 debido a una fuerza unitaria aplicada en 2 según una dirección P_2, es igual al valor del corrimiento en 2 según la dirección P_2, provocado por una fuerza unitaria aplicada en 1 según una dirección P_1”.

Mencionamos específicamente el “valor”, pues como se aprecia en el ejemplo, la igualdad no incluye a las unidades, pues δ_{12} es un desplazamiento que se mide en unidades de longitud y δ_{21} es un ángulo que se mide en radianes, ya que cuando hablamos de corrimientos entendemos tanto a un desplazamiento lineal como una rotación, dependiendo del tipo de vector carga con el que se evalúa el trabajo. En otras palabras es un “*corrimiento correspondiente*” que ya fue mencionado en 1-5 y por lo tanto el vector carga es colineal con el vector corrimiento.

1.8-TEOREMA DE CASTIGLIANO



$$\lim_{\Delta Pi \to 0} \frac{\Delta Te}{\Delta Pi} = \lim_{\Delta Pi \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta Pi} = \frac{\partial U}{\partial Pi}$$

Consideremos un sólido elástico que por simplicidad sea una viga como la de la figura, que está sometida a un sistema de fuerzas Pi: P_1, P_2,... Pi,... Pn, al cual corresponde un conjunto de corrimientos correspondientes δ_1: δ_2,... δi..., δn.

Se cumplirá que de acuerdo con el teorema de Clapeyron será:

$Te = Te(Pi) = U(P)$ función de las fuerzas Pi y por lo tanto derivable parcialmente respecto a una cualquiera de ellas, para lo cual debemos hallar el límite del cociente incremental:

Aplico entonces en el punto i una fuerza dPi, mientras las otras permanecen constantes, produciéndose desplazamientos $d\delta_1$, $d\delta_2$,... $d\delta i$,... $d\delta n$ en correspondencia con el sistema de fuerzas Pi y un trabajo:

$$dTe = dU = \sum_{j=1}^{n} Pj \cdot d\delta j + \text{inf initesimos de } 2^{\circ} \text{orden}$$

Este incremento de Trabajo o Energía por aplicación del Teorema de Betti será igual a:

$$dTe = dU = dPi \cdot \delta i$$

y en consecuencia:

$$\frac{\partial Te}{\partial Pi} = \frac{\partial U}{\partial Pi} = \delta i$$

que expresa: *"La derivada parcial del Trabajo de Deformación respecto de una de las fuerzas, es igual al desplazamiento de su punto de aplicación medido en la dirección de la fuerza".*

A esta última expresión se puede también llegar a partir de la ecuación del tema 1.5

$$Te = U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Pk \cdot Pj \cdot \delta kj$$

$$Te = U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} Pk \sum_{j=1}^{n} \delta kj \cdot Pj$$

$$\frac{\partial Te}{\partial Pi} = \frac{\partial U}{\partial Pi} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Pk}{\partial Pi} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \delta kj \cdot Pj\right) + \sum_{k=1}^{n} Pk \sum_{j=1}^{n} \delta kj \cdot \frac{\partial Pj}{\partial Pi}\right]$$

Dónde $\frac{\partial P_a}{\partial P_b}$ es igual a 0 si $a \neq b$ e igual a 1 si $a = b$

$$\frac{\partial Te}{\partial Pi} = \frac{\partial U}{\partial Pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial Pi}{\partial Pi} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \delta ij \cdot Pj\right) + \sum_{k=1}^{n} Pk \cdot \left(\delta ki \cdot \frac{\partial Pi}{\partial Pi}\right)\right]$$

$$\frac{\partial Te}{\partial Pi} = \frac{\partial U}{\partial Pi} = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \delta ij \cdot Pj + \sum_{k=1}^{n} \delta ki \cdot Pk\right] \text{ y como}$$

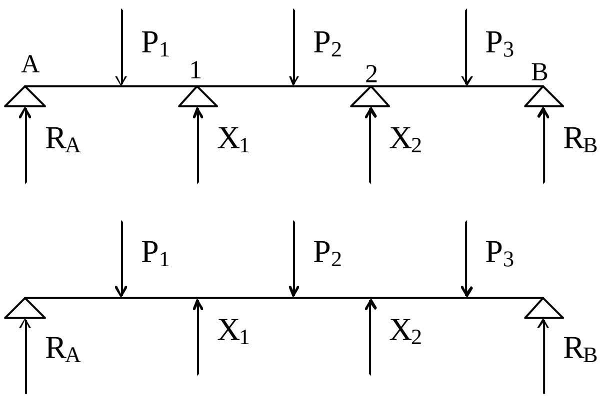
$$\sum_{j=1}^{n} \delta ij \cdot Pj = \sum_{k=1}^{n} \delta ik \cdot Pk \qquad \therefore \qquad \frac{\partial Te}{\partial Pi} = \frac{\partial U}{\partial Pi} = \sum_{j=1}^{n} \delta ij \cdot Pj$$

será: $\frac{\partial Te}{\partial Pi} = \frac{\partial U}{\partial Pi} = \delta i$ según la expresión del tema1.5

En forma semejante es posible expresar lo que se conoce como **Segundo Teorema de Castigliano**, definido matemáticamente mediante la ecuación:

$$\frac{\partial Te}{\partial \delta i} = \frac{\partial U}{\partial \delta i} = Pi$$

1.9-TEOREMA DE MENABREA



Sea un sólido elástico como el de la figura con vínculos rígidos que esta sometido a un sistema de cargas $P(P_1; P_2; P_3; ...)$, Con lo cual se producirán reacciones $R(R_A; R_B)$ y $X(X_1; X_2)$.

Explicitemos las reacciones X_1 y X_2 eliminando los Vínculos sobreabundantes, en este caso los apoyos intermedios.

Es inmediato que las X son funciones de las P y que los puntos donde actúan los corrimientos δx se anularán. Será además:

$$U = U(P, X)$$

y podremos hacer las derivadas parciales con respecto de las *X*, que por Castigliano valdrán:

$$\delta_{X1} = \frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial Te}{\partial X_1} = 0 \qquad \delta_{X2} = \frac{\partial U}{\partial X_2} = \frac{\partial Te}{\partial X_2} = 0$$

Lo cual implica que si consideramos a la Energía Potencial de Deformación como una función de las variables X, dicha Energía cumple con la condición $\frac{\partial U}{\partial X}=0$ necesaria para tomar un valor extremo máximo o mínimo. Se cumplirá que la Energía pasa por un mínimo si:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \delta x = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{\partial \delta x}{\partial X} > 0$$

Para lo cual, debemos interpretar que representa la derivada de un desplazamiento δx respecto a la fuerza X.

Recordando el tema 1.5 estudiémoslo para una fuerza genérica Pi

$$\frac{\partial U}{\partial Pi} = \delta i = P_1 \cdot \delta_{i1} + P_2 \cdot \delta_{i2} + \ldots + P_i \cdot \delta_{ii} + P_n \cdot \delta_{in}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Pi^2} = \delta ii$$ corrimiento del punto i para una carga Pi = 1, coeficiente necesariamente positivo

Análogamente $\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \delta xx > 0$ corrimiento del punto de aplicación de X para un X=1, con lo cual se cumple que estamos en un caso de mínimos.

“En un sistema hiperestático con vínculos rígidos sometido a fuerzas externas, las reacciones hiperestáticas toman valores que hacen mínimo el Trabajo de deformación”.

1.10-APLICACIONES DE LOS TEOREMAS DE TRABAJO A SISTEMAS ESTRUCTURALES

Analizaremos algunas aplicaciones teóricas con vistas a su utilización docente en el curso, pensando ya en sistemas estructurales formados por barras.

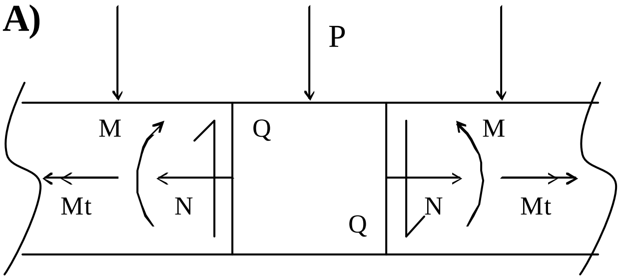
1.10.1-TRABAJO VIRTUAL INTERNO

Evaluaremos el Trabajo Virtual Interno Ti* de las solicitaciones internas M (momento flector), Q (esfuerzo de corte), N (esfuerza normal), Mt (momento torsor), en una barra sometida a un estado de cargas externas P que produce deformaciones $d\varphi$; Δds; $\gamma \cdot ds$ y $\theta \cdot ds$. (a)

Además pueden existir incrementos de temperaturas t_s (superior) y t_i (inferior) que producirán deformaciones $d\varphi_t$ y Δds_t (b)

a) Cargas *P*

A)



$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds$$

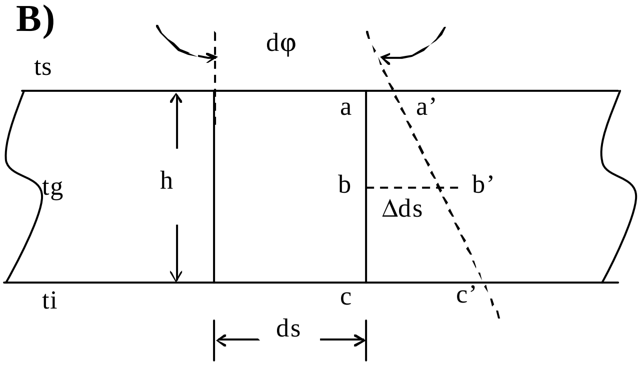
$$\Delta ds = \frac{N}{E\Omega} ds$$

$$\gamma . ds = \chi \frac{Q}{G\Omega} ds$$

$$\theta . ds = \frac{Mt}{GIp} ds$$

b) Efecto de incremento de temperaturas t_s (superior); t_i (inferior) y t_g (baricéntrica) y con α coeficiente de dilatación lineal

B)



$$\delta_{aa'} = \alpha \cdot ts \cdot ds$$

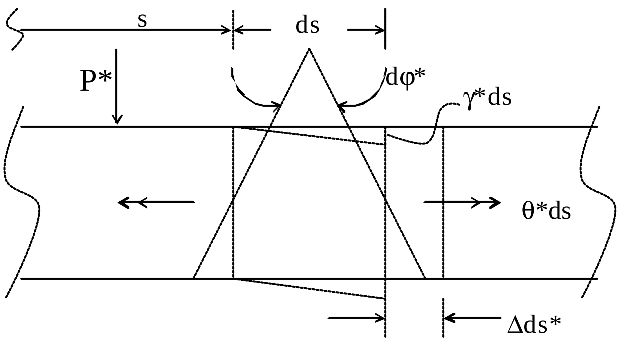
$$\Delta ds = \delta_{bb'} = \alpha \cdot t_g \cdot ds$$

$$\delta_{cc'} = \alpha \cdot ti \cdot ds$$

$$d\varphi = \alpha \cdot \frac{ti - ts}{h} \cdot ds$$

c) El estado de deformación virtual es debido a cargas virtuales P* que produce solicitaciones virtuales M*; N*; Q*; Mt* con sus respectivos desplazamientos

C)



$$d\varphi^* = \frac{M^*}{EI} ds$$

$$\Delta ds^* = \frac{N^*}{E\Omega} ds$$

$$\gamma^* . ds = \chi \frac{Q^*}{G\Omega} ds$$

$$\theta^* . ds = \frac{Mt^*}{GIp} ds$$

Supongamos que el estado de deformación debido a los efectos externos de cargas P e incrementos de temperatura produce desplazamientos

$$d\varphi = \left(\frac{M}{EI} ds + \alpha . \frac{t_i - t_s}{h} \right) ds$$

$$\Delta ds = \left(\frac{N}{E\Omega} ds + \alpha . t_g \right) ds$$

$$\gamma . ds = \chi \frac{Q}{G\Omega} ds$$

$$\theta . ds = \frac{Mt}{GIp} ds$$

las considero como reales.

Por el contrario a las deformaciones $d\varphi^*$; Δds^*; $\gamma^* \cdot ds$ y $\theta^* \cdot ds$ debidas a P* los consideramos como virtuales porque son pequeños y compatibles con los vínculos cumpliéndose entonces en ese elemento:

$$dTi^* = -M^* (d\varphi) - N^* (\Delta ds) - Q^* (\gamma . ds) - Mt^* (\theta . ds)$$

$$dTe^* = -dTi^* = M^* \left(\frac{M}{EI} ds + \alpha . \frac{t_i - t_s}{h} \right) ds + N^* \left(\frac{N}{E\Omega} ds + \alpha . t_g \right) ds + Q^* \left(\frac{\chi Q}{G\Omega} \right) ds + Mt^* \left(\frac{Mt}{GIp} \right) ds$$

y por lo tanto en la barra:

$$-Ti^* = Te^* = \int_0^l \frac{MM^*}{EI} ds + \int_0^l \frac{NN^*}{E\Omega} ds + \int_0^l \frac{\chi QQ^*}{G\Omega} ds + \int_0^l \frac{MtMt^*}{GIp} ds + \int_0^l M^* \alpha \frac{ti - ts}{h} ds + \int_0^l N^* \alpha . t_g ds$$

Dónde los dos últimos términos se deben a efectos de temperatura, con los cuales no trabajaremos en el curso, pero que no provoca ninguna dificultad especial en su aplicación.

Explicitemos ahora una propiedad de la expresión;

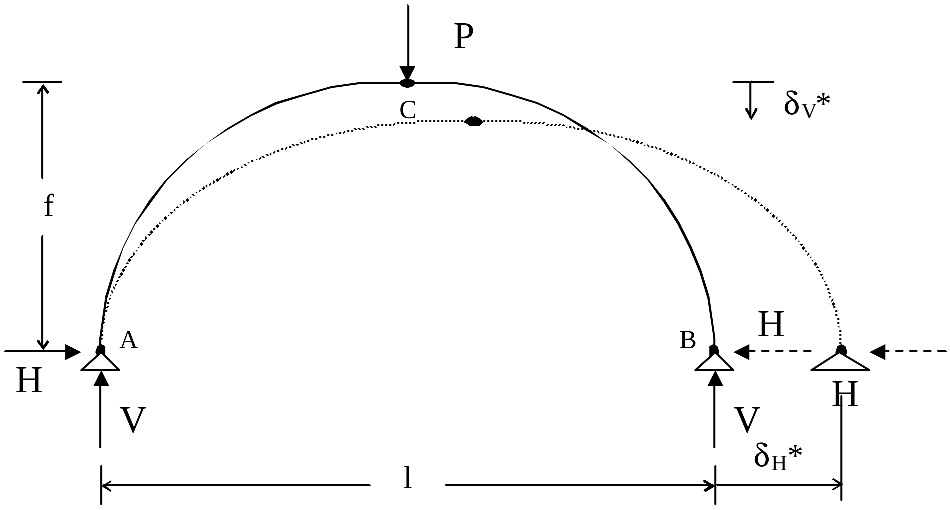
$$-Ti^* = Te^* = \int_0^l \frac{MM^*}{EI} ds + \int_0^l \frac{NN^*}{E\Omega} ds + \int_0^l \frac{\chi QQ^*}{G\Omega} ds + \int_0^l \frac{MtMt^*}{GIp} ds$$

que por la simetría puede ser considerada el trabajo virtual de las cargas P a lo largo de los desplazamientos virtuales producidos por P*, o como el trabajo de las cargas P* a lo largo de los desplazamientos virtuales producidos por un sistema de cargas P.

A esta misma conclusión podríamos llegar por el Teorema De Betti, considerando a P como el estado de cargas I y a P* como el estado de cargas II.

1.10.2-DESPLAZAMIENTO EN SISTEMAS RIGIDOS

Sea un arco de tres articulaciones de la figura en la cual se a producido un desplazamiento Horizontal δ^*_H del apoyo B del lado derecho y se desea conocer el descenso δ^*_V en la articulación C.



Para ello coloco una carga P (que puede ser unitaria o no) en el punto C y que producirá trabajo a través del corrimiento desconocido δ_V*.

P producirá las reacciones que forman un sistema en equilibrio con:

$$V = \frac{1}{2}P \qquad\qquad H = \frac{V \cdot l}{2 \cdot f} = \frac{P \cdot l}{4 \cdot f}$$

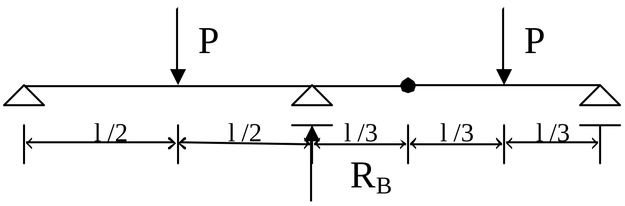
Pensando en los desplazamientos como virtuales y el sistema de cargas como real puedo aplicar el Principio de los Trabajos Virtuales para rígidos donde:

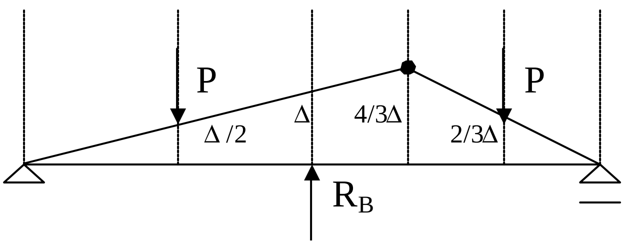
$$Te^* = 0$$

$$Te^* = P \cdot \delta_V{}^* - H \cdot \delta_H{}^* = 0 \qquad \therefore \qquad \delta_V{}^* = \frac{l}{4f}\delta_H{}^*$$

Este ejercicio podría resolverse de forma geométrica utilizando los métodos de “cadena cinemática”.

1.10.3-CALCULO DE UNA REACCION ISOSTATICA





Sea la viga isostática de la figura en la cual queremos conocer el valor de la reaccion R_B para el sistema de cargas P enequilibrio con las reacciones en A, B, y C.

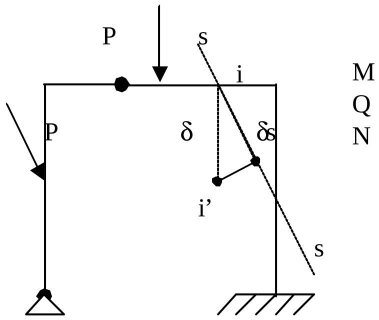
Elimino el apoyo B explicitando la reacción R_B como carga externa. El sistema se convierte en un mecanismo de 1 grado o cadena cinemática a la cual doy un desplazamiento virtual cuyo valor en B es igual a Δ. En este caso tambien Te* = 0 :

$$Te^* = -P \cdot \frac{\Delta}{2} + R_B \cdot \Delta - P \cdot \frac{2}{3}\Delta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_B = \frac{7}{6}P$$

No dependiendo naturalmente del desplazamiento virtual *D* arbitrario dado al punto B.

1.10.4-DEFORMACIONES EN SISTEMAS ELASTICOS DE ALMA LLENA

a) Desplazamientos

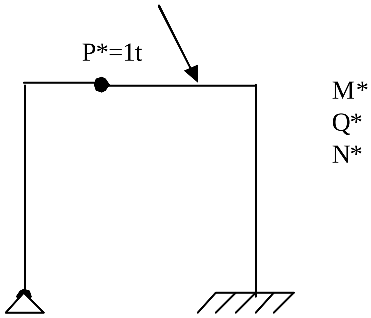


Sea un portico sometido a un estado de cargas P que produce un estado de solicitaciones M, N, Q y de deformaciones de las cuales deseo conocer el desplazamiento de un punto genérico i en la dirección s-s (δs).

Aplico en i una carga virtual P* = 1 en la dirección s-s que produce solicitaciones M*, N*, Q*.

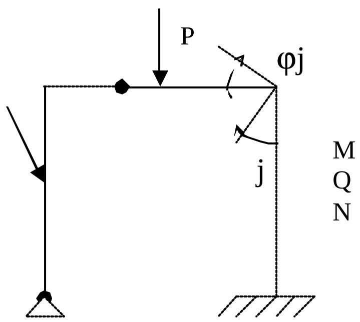
Calculo los Trabajos Virtuales de acuerdo con 1.10.1. tomando como cargas las *P** y como desplazamientos virtuales los reales debidos a P:

$$-\text{Ti}^* = \text{Te}^* = P^*\,\delta s = \int_0^l \frac{MM^*}{EI}ds + \int_0^l \frac{NN^*}{E\Omega}ds + \int_0^l \chi\frac{QQ^*}{G\Omega}ds$$



$$\delta s = \frac{1}{1t}\left[\int_0^l \frac{MM^*}{EI}ds + \int_0^l \frac{NN^*}{E\Omega}ds + \int_0^l \chi\frac{QQ^*}{G\Omega}ds\right]$$

b) Rotaciones:

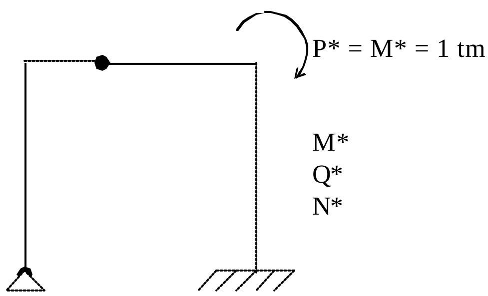


Sea el ejemplo anterior donde me interesa conocer la rotación de un punto genérico j, como por ejemplo el nudo (φj).

Aplico en j una carga virtual
P* = M* = 1tm,

que produce M*, N*, Q*.

Análogamente con –Ti* dado por una expresión similar al caso anterior:

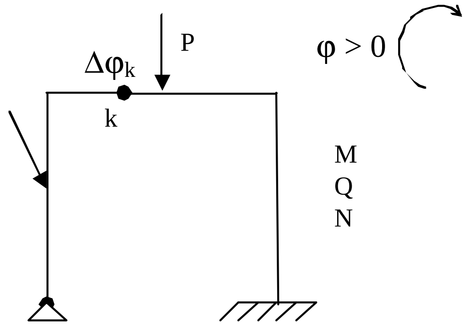


$$-\text{Ti}^* = \text{Te}^* = M^* \cdot \varphi j = 1\,\text{tm} \cdot \varphi j$$

$$\varphi j = \frac{1}{1\,\text{tm}}\left[\int_0^l \frac{MM^*}{EI}ds + \ldots\ldots\right]$$

Es de hacer notar que tanto en el caso anterior como en este si el desplazamiento (o la rotación) es positivo significa que tiene la dirección de la carga virtual P*= 1, y en caso de ser negativo el sentido es contrario al de la carga P*.

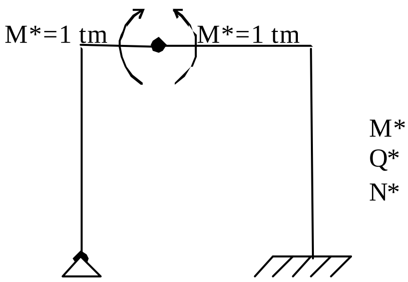
c) Rotación relativa de dos secciones:

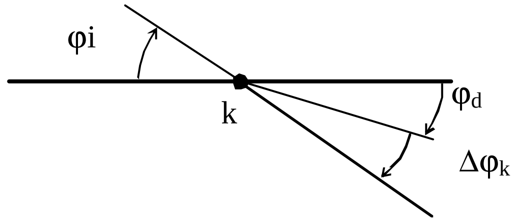


Sea nuestra incógnita la rotación relativa de la articulación k ($\Delta\varphi_k$) donde:

$$\Delta\varphi_k = \varphi_i - \varphi_d$$

Donde φ_i es la rotación a la izquierda y φ_d es la rotación a la derecha de la n:





La carga virtual a aplicar en k será un par de momentos M* igual a +1 tm y – 1tm

$$1tm \cdot \varphi i - 1tm \cdot \varphi_d = 1tm \cdot \Delta\varphi_k = \int_0^l \frac{MM^*}{EI} ds + \int_0^l \frac{NN^*}{E\Omega} ds + ...$$

$$\Delta\varphi_k = \frac{1}{1tm}\left[\int_0^l \frac{MM^*}{EI} ds + \ldots\ldots\right]$$

1.10.5-DEFORMACIONES EN SISTEMAS ELASTICOS RETICULADOS

En caso de sistemas reticulados, las expresiones del tema 1.10.1 quedan reducidas a;

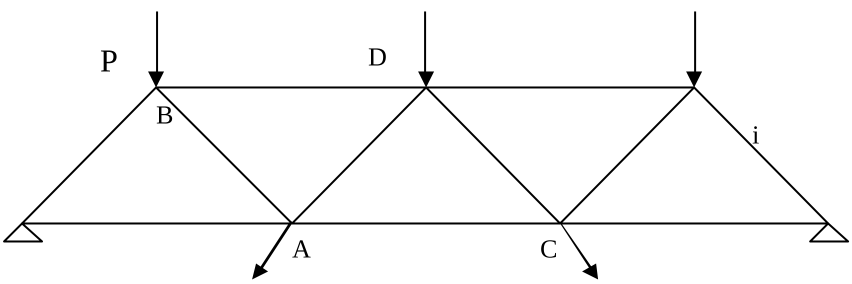
$$-Ti^* = Te^* = \int_0^l \frac{NN^*}{E\Omega} ds = \sum_{i=1}^{n} \int_0^l \frac{Ni \cdot Ni^*}{E\Omega i} ds$$

dónde i indica a la barra de longitud li sección *Wi* y esfuerzos normales constantes en la barra i: Ni = Si; Ni* = Si* de un reticulado de n barras.

$$\int_0^l \frac{Ni \cdot Ni^*}{E\Omega i} ds = \frac{Si \cdot Si^*}{E\Omega} \int_0^l ds = \frac{Si \cdot Si^*}{E\Omega} \cdot li$$

$$-Ti^* = Te^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{Si \cdot Si^*}{E\Omega} \cdot li$$

Sea un reticulado como el de la figura con un estado de cargas P que produce solicitaciones en las barras Si.

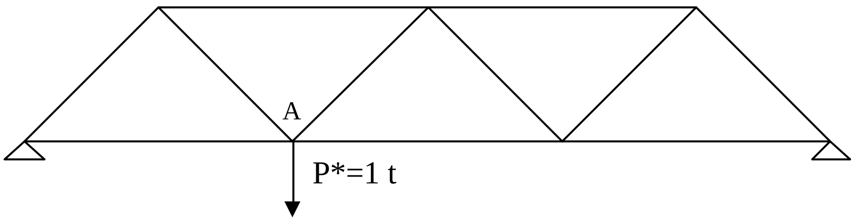


Utilizando la expresión última dónde:

$$Te^* = P^* \cdot \delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{Si \cdot Si^*}{E\Omega} \cdot li$$

P* es la carga virtual que produce trabajo a lo largo del desplazamiento real δ cuyo significado se expresa a continuación para 3 casos:

a) *Desplazamiento de un nudo*

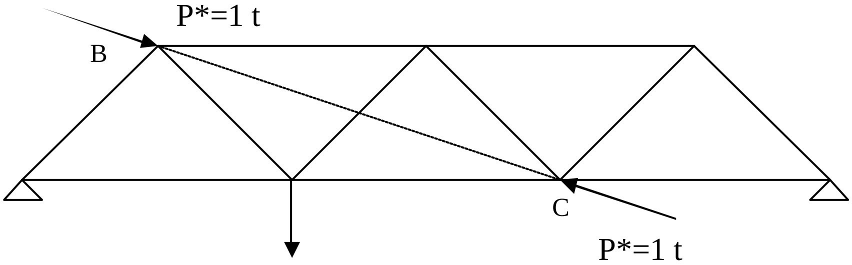


Descenso del nudo A: $\delta = \delta_A$

Carga virtual P* = 1 t en el sentido de δ_A

$$\delta_A = \frac{1}{1t} \sum_{i=1}^{n} \frac{Si \cdot Si^*}{E\Omega i} \cdot li$$

b) *Desplazamiento relativo de 2 nudos*

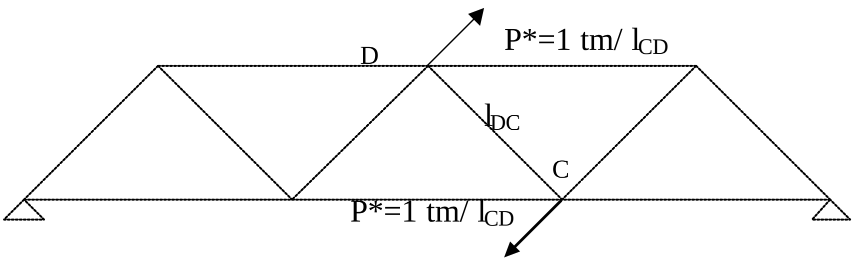


Desplazamiento relativo entre B y C $\delta = \delta_{BC}$

Carga virtual: dos cargas P* = 1 t de sentido contrario

$$\delta_{BC} = \frac{1}{1t} \sum_{i=1}^{n} \frac{Si \cdot Si^*}{E\Omega i} \cdot li$$

c) *Rotación de una barra*



Rotación de la barra DC $\delta = \varphi_{BC}$

Carga virtual: dos cargas P* = 1 tm/ l_{DC}

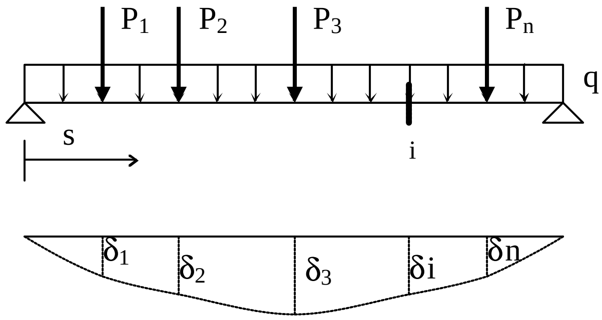
$$\varphi_{BC} = \frac{1}{1tm} \sum_{i=1}^{n} \frac{Si \cdot Si^*}{E\Omega i} \cdot li$$

1.11-APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CASTIGLIANO AL CALCULO DE DESPLAZAMIENTOS

Partiendo de las ecuaciones de Trabajo y Energía

$$Te = U = \frac{1}{2}\sum P \cdot \delta = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mf^2}{EI} ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{E\Omega} ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\chi Q^2}{G\Omega} ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mt^2}{GIp} ds$$

En adelante y por razones de simplicidad en las expresiones tomaremos sólo el trabajo del primer término debido a los momentos flectores Mf con lo cual por analogía se podría agregar la influencia de N, Q, Mt en forma muy simple para tener las expresiones generales.



Esto también podría equivaler a despreciar los trabajos y por lo tanto las deformaciones debidas a N, Q, Mt, lo cual es bastante común y aceptable para sistemas de alma llena sometidos a flexión.

Con $U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mf^2}{EI} ds$ será:

$$\frac{\partial U}{\partial Pi} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial (Mf)^2}{\partial Pi} \cdot \frac{ds}{EI} = \int \frac{Mf}{EI} \cdot \frac{\partial Mf}{\partial Pi} ds = \delta_i$$

δi = desplazamiento del punto i en el sentido de la fuerza Pi que puede existir o no, ya que podría tener un valor 0 (cero)

Por el principio de superposición será:

$$Mf = Mf(q, P_1, P_2, Pi, \ldots, Pn, s)$$

y llamando Mj(s) al valor del momento flector para Pj = 1, el momento flector para el verdadero valor de PJ será $Mf_j(Pj, s) = Pj \cdot Mj(s)$

$$Mf = Mf_q(q, s) + Mf_1(P_1, s) + Mf_2(P_2, s) + \ldots + Mf_i(P_i, s) + \ldots + Mf_n(P_n, s)$$

$$\frac{\partial Mf}{\partial Pi} = \frac{\partial Mf_i}{\partial Pi} = \frac{\partial [P_i \cdot Mi(s)]}{\partial Pi} = Mi(s)$$ =Diagrama de momento para Pi = 1 en el pto. I.

Entonces:

$$\delta i = \int_0^l \frac{Mf}{EI} \frac{\partial Mf}{\partial Pi} ds = \int_0^l \frac{Mf}{EI} Mi \cdot ds =$$

Expresión idéntica a la encontrada por ejemplo en el tema (1-10.4) a)

$$\delta s = \frac{1}{1t}\int_0^l \frac{M}{EI} M^* ds$$ ya que en esta representan

M = Momento flector de las fuerzas P $\Rightarrow$ (Mf)

M*= Momento flector para P*=1 $\Rightarrow \left(\frac{\partial Mf}{\partial Pi}\right) = Mi$

δs = desplazamiento correspondiente con P*$\Rightarrow$ δ_i correspondiente con Pi

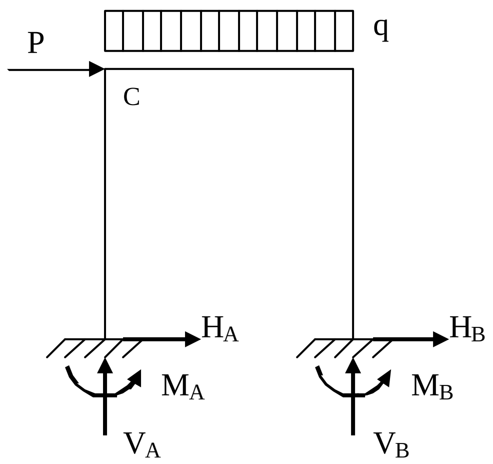
1.12-APLICACIÓN DEL TEOREMA DE MENABREA

Recordemos que en una estructura hiperestática con incógnitas Xi se cumple:

$$\delta xi = \frac{\partial U(P;X)}{\partial Xi} = 0 \qquad \text{y con} \qquad U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Mf^2}{EI}\cdot ds$$

$$\text{Será:} \quad \delta xi = \frac{\partial U}{\partial Xi} = \int_0^l \frac{Mf}{EI}\cdot\frac{\partial Mf}{\partial Xi}\cdot ds = 0$$

Sea un sistema hiperestático como el de la figura en el cual se eligen como incógnitas hiperestáticas:



X_1 = Momento flector en C (Mfc)
X_2 = momento en B (M_B)
X_3 = Reacción Horizontal en B (H_B)

Los sistemas de las dos figuras son equivalentes siempre que los Xi tomen los verdaderos valores Mfc, M_B, H_B para los cuales se cumplirá:

$$\delta x_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{Rotación relativa en C}$$

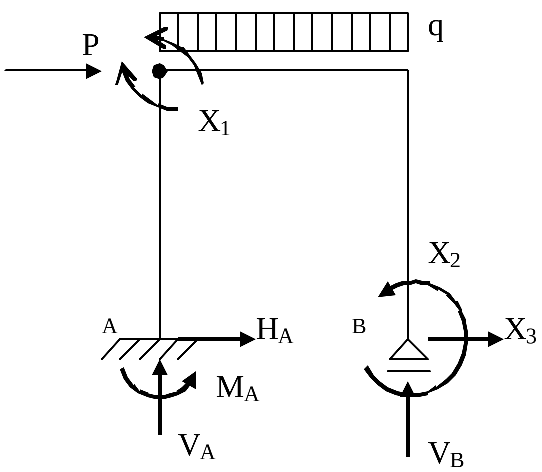
$$\delta x_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{Rotación apoyo B}$$

$$\delta x_3 = \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0 \qquad \text{Desplaz. horiz. apoyo B}$$

Siendo Mf = Mf (P, q, X_1, X_2, X_3)

Y denominando como: Mo = Mo (P, q) = momento debido a cargas exteriores

$$\frac{\partial Mf}{\partial Xi} = Mi = Mi_{(xi=1)} = \text{Momento debido a Xi = 1}$$



$$Mf = Mo + X_1M_1 + X_2M_2 + X_3M_3$$

$$\frac{\partial Mf}{\partial X_1} = M_1 \quad ; \quad \frac{\partial Mf}{\partial X_2} = M_2 \quad ; \quad \frac{\partial Mf}{\partial X_3} = M_3$$

$$\delta_{X_1} = \int \frac{(Mo + X_1M_1 + X_2M_2 + X_3M_3)}{EI}\cdot M_1\cdot ds = 0$$

$$\delta_{X_2} = \int \frac{(Mo + X_1M_1 + X_2M_2 + X_3M_3)}{EI}\cdot M_2\cdot ds = 0$$

$$\delta_{X_3} = \int \frac{(Mo + X_1M_1 + X_2M_2 + X_3M_3)}{EI}\cdot M_3\cdot ds = 0$$

Sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas que nos permiten calcular las X_1 X_2 y X_3 y por lo tanto:

$$Mf = Mo + X_1M_1 + X_2M_2 + X_3M_3$$